円の接線の公式とその導き方

円の接線の公式

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ で表される円周上の点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ を通る接線の方程式は,

$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

導き方 1

円の中心を C，接線上の P でない点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \perp \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$

これと $\overrightarrow{\mathrm{CP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\begin{pmatrix} x_0-a \\ y_0-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{pmatrix}=(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-b)$ より,

$(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-b)=0$

これは $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ についても成り立つ。

よって，接線の方程式は $(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-b)=0$

実用上はこれで十分だが，これをさらに接線の公式に変形してみる。

$$\begin{aligned}(x_0-a)(x-x_0)+(y_0-b)(y-b)&=(x_0-a)\{(x-a)-(x_0-a)\}+(y_0-b)\{(y-b)-(y_0-b)\}\\&=(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-\{(x_0-a)^2+(y_0-b)^2\}\\&=(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-r^2\end{aligned}$$

より，$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)-r^2=0$

すなわち $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$

導き方 2

接線の傾きを m とすると，接点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線の方程式は，$y=m(x-x_0)+y_0$

次に，点 $\mathrm{P}(x_0, y_0)$ における接線の傾き m を微分により求める。

$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ を x について微分すると,

$\dfrac{d(x-a)^2}{dx}+\dfrac{d(y-b)^2}{dx}=0$ より，$\dfrac{d(x-a)^2}{dx}+\dfrac{d(y-b)^2}{dy}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

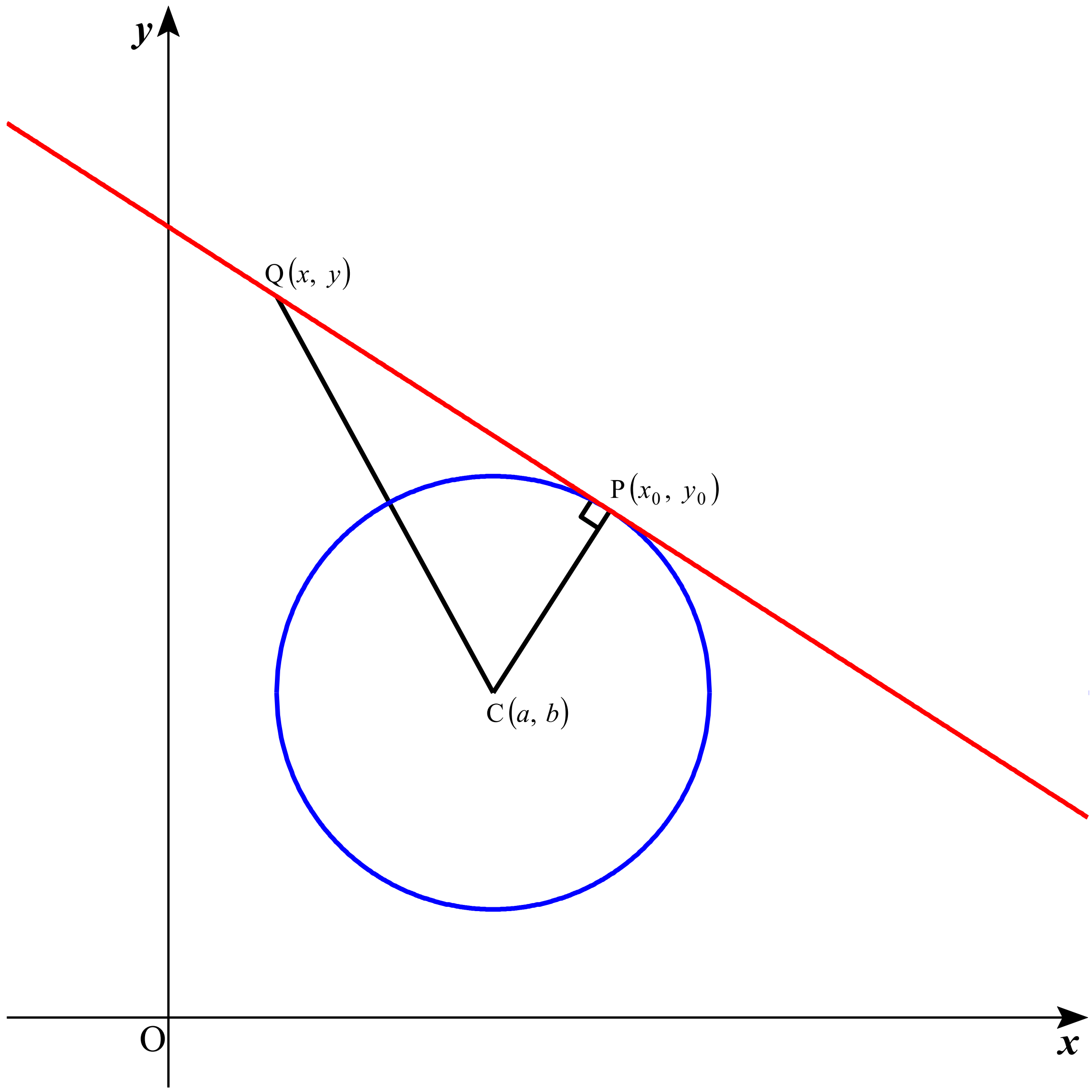
よって，$2(x-a)+2(y-b)\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$

$(x,\ y)\neq(a,\ b)$ より，$m=\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x-a}{y-b}$

ゆえに，接線の方程式は，$y=\dfrac{x_0-a}{y_0-b}(x-x_0)+y_0$

実用上はこれで十分である。

これを $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$ に変形する手順は導き方 1 と同じ。


y
Q(x, y)
P(x_0, y_0)
C(a, b)
O
x